УДК 517.917

© О. Г. Оленчикова, Д. М. Оленчиков

ГЛОБАЛЬНАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ДИСКРЕТНО-БИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Будем использовать следующие обозначения:
$\mathcal{M}_{n\times m}$ — множество матриц размерности $n\times m$; норма вектора $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \max\limits_{k=1,\dots,n}|x_k|$; согласованная с ней норма матрицы $\|A\| = \|(a_{ij})\| = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$.

Рассмотрим дискретно-билинейную систему запаздывающего типа

$$\dot x(t) = A(t)x(t) + B(t)\sum_{k=1}^{p}\chi(t,\tau_k,\theta_k)U_k x(\tau_k).$$

Здесь $I=[t_0,t_1]$, $t\in I$, вектор $x(t)\in\mathbb{R}^n$; $A(t)\in\mathcal{M}_{n\times n}$ и $B(t)\in\mathcal{M}_{n\times m}$ — матрицы с непрерывными элементами,

$$\chi(t,\tau_k,\theta_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } t\in[\tau_k,\theta_k);\\ 0 & \text{при } t\notin[\tau_k,\theta_k). \end{cases}$$

Управляемые параметры: p, τ_k, θ_k, $U_k\in\mathcal{M}_{m\times n}$, причем

$$\theta_0 = t_0 \leqslant \tau_1 < \theta_1 \leqslant \tau_2 < \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_p < \theta_p \leqslant t_1 = \tau_{p+1}. \tag{1}$$

Определение 1. Любая пара $U = \big(p, \{(\tau_k,\theta_k,U_k)\}_{k=1}^{p}\big)$; удовлетворяющая условию (1) называется *допустимым управлением*. При этом $|U| = \max\limits_k \|U_k\|$ называется *модулем* управления U.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot x(t) = A(t)x(t) + B(t)\sum\limits_{k=1}^{p}\chi(t,\tau_k,\theta_k)U_k x(\tau_k);\\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

Решение задачи (2) определяется равенствами:

$$\begin{aligned} x(\theta_0) &= x(t_0);\\ x(t) &= X(t,\theta_k)x(\theta_k), && t\in(\theta_k,\tau_{k+1}];\\ x(t) &= X(t,\tau_k)\Big(E + \int_{\tau_k}^{t} X(\tau_k,s)B(s)\,ds\,U_k\Big)x(\tau_k), && t\in(\tau_k,\theta_{k+1}]. \end{aligned}$$

Здесь $X(t,s)$ — матрица Коши системы $\dot x = A(t)x$.
Обозначим

$$X(t,V_0,U) = \big(x(t,v_1,U),\dots,x(t,v_q,U)\big),\ V_0 = (v_1,\dots,v_q)\in\mathcal{M}_{n\times q}.$$

Рассмотрим матрицу

$$V = (v_1,\dots,v_n) = \Big(\int_{\tau_k}^{\theta_k} X(t_0,s)b_{j_k}(s)\,ds\Big)_{k=1}^{n},$$

отвечающую некоторой последовательности точек τ_k, θ_k.

О п р е д е л е н и е 2. Невырожденную матрицу V (вместе с соответствующей последовательностью моментов переключения управления τ_k, θ_k) будем называть *базисной.*

Полученные здесь результаты дополняют исследования работ [1], [2].

Т е о р е м а 1. *Базисная матрица существует тогда и только тогда, когда соответствующая классическая система*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{3}$$

вполне управляема.

Т е о р е м а 2 (о повороте на диагональную матрицу). *Для любой базисной матрицы V и всякой диагональной матрицы $G = \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_n)$ существует допустимое управление U такое, что модуль $|U|$ удовлетворяет неравенству $|U| \leqslant C_X \cdot \|V^{-1}\| \cdot \|G\|$ и*

$$x(t_1, E, U) = X(t_1, t_0)(E + VGV^{-1}).$$

Здесь C_X — константа, ограничивающая матрицу Коши:

$$\|X(t, s)\| \leqslant C_X \quad \text{при всех } t, s \in I\,.$$

С л е д с т в и е 1. *Если классическая система* (3) *вполне управляема, то существует так называемое универсальное управление U, то есть такое управление, что $x(t_1, x_0, U) = 0$ для всякого $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Т е о р е м а 3 (локальный метод поворотов). *Если классическая система* (3) *вполне управляема, то найдутся такие константы C_U, C_G, что всякой матрице G, удовлетворяющей неравенству $\|G\| \leqslant C_G$, отвечает допустимое управление U, $|U| \leqslant C_U \cdot \|G\|$, обеспечивающее равенство*

$$X(t_1, E, U) = X(t_1, t_0)(E + G).$$

Т е о р е м а 4 (о почти повороте матрицы Коши). *Если соответствующая классическая система* (3) *вполне управляема, то для любой константы C_G и любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такая константа C_U, что для всякой матрицы G, $\|G\| \leqslant C_G$, существуют матрица Q и допустимое управление U, удовлетворяющие неравенствам $\|Q\| \leqslant \varepsilon$, $|U| \leqslant C_U \cdot \|G\|$ и обеспечивающие равенство*

$$X(t_1, E, U) = X(t_1, t_0)(E + G + Q).$$

Т е о р е м а 5 (о повороте на невырожденную матрицу). *Пусть система* (3) *вполне управляема на отрезках $[t_0, t_1]$ и $[t_1, t_2]$. Тогда для любых констант C_G, $C_{(E+G)^{-1}}$ найдется константа C_U такая, что всякой матрице G, удовлетворяющей неравенствам $\|G\| \leqslant C_G$, $\|(E + G)^{-1}\| \leqslant C_{(E+G)^{-1}}$, отвечает допустимое управление U, $|U| \leqslant C_U \cdot \|G\|$, обеспечивающее равенство*

$$X(t_2, E, U) = X(t_2, t_0)(E + G).$$

Список литературы

1. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифферен. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
2. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 731–734.

Оленчикова Ольга Григорьевна
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: diol@idz.ru

Оленчиков Дмитрий Моисеевич
Ижевский нефтяной научный центр,
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: diol@idz.ru